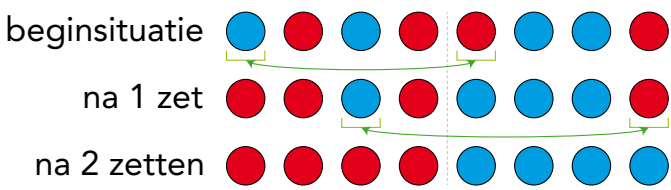
In mei vorig jaar vond in Brugge de zesde editie van de Benelux Wiskunde Olympiade plaats. Van de vier opgaven die de deelnemers voorgeschoteld kregen, werden er twee bedacht door Merlijn Staps, trainer bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Samen met Daniël Kroes, eveneens trainer en een van de begeleiders van het Nederlandse team bij deze wedstrijd, bespreekt hij in dit artikel een van deze opgaven.

■ door Merlijn Staps en Daniël Kroes

SPELEN MET FICHES

Opgave 2 (BxMO 2014)
Zij $k \geq 1$ een geheel getal. We beschouwen $4k$ fiches, waarvan er $2k$ rood zijn en $2k$ blauw. We kunnen een rijtje van deze $4k$ fiches veranderen in een ander rijtje door een zogenaamde *zet*, die bestaat uit het omwisselen van een aantal (mogelijk één) opeenvolgende rode fiches met een gelijk aantal opeenvolgende blauwe fiches.
We kunnen bijvoorbeeld in één zet het rijtje $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ veranderen in $r\underline{rr}br\underline{bb}b$, waarbij r staat voor een rood fiche en b voor een blauw fiche. Bepaal het kleinste getal n (als functie van k) zodanig dat, ongeacht met welk rijtje van deze $4k$ fiches we beginnen, we ten hoogste n zetten nodig hebben om het rijtje te bereiken waarvan de eerste $2k$ fiches allemaal rood zijn.

Zoals wel vaker handig is bij olympiade-opgaven, beginnen we ook hier maar eens met een aantal kleine gevallen. Als $k = 1$ beginnen we met 4 fiches op een rij, waarvan er twee rood zijn en twee blauw. De vraag is hoeveel zetten we nodig hebben om dit rijtje te veranderen in het rijtje waarvan de eerste twee fiches rood zijn. Dit aantal hangt natuurlijk af van hoe het rijtje er aanvankelijk uit ziet. Als de eerste twee fiches aan het begin al rood zijn, hoeven we helemaal geen zetten te doen. Als de eerste twee juist blauw zijn, kunnen we deze in één zet verwisselen met de twee rode fiches en zijn we ook klaar. En het laatste geval: als precies één van de eerste twee fiches blauw is, kunnen we dat fiche omwisselen met het juiste rode fiche zijn we ook in één zet klaar. Dus als $k = 1$, is het maximale aantal zetten dat we nodig hebben (n), gelijk aan 1.



Figuur 1

Als $k = 2$ hebben we in totaal 8 fiches. We kijken weer hoeveel van de eerste 4 fiches aan het begin al rood zijn:

- als deze fiches allemaal rood zijn, hebben we 0 zetten nodig;
- als er van deze fiches 3 rood zijn, hebben we 1 zet nodig;
- als er van deze fiches 2 rood zijn, kunnen we de 2 andere fiches één voor één wisselen en hebben we aan 2 zetten genoeg (zie figuur 1);
- als er van deze fiches 1 rood is, hebben we ook aan 2 zetten genoeg (zie figuur 2): we kunnen in één zet ervoor zorgen dat de eerste 4 fiches blauw zijn en vervolgens verwisselen we alle blauwe fiches met alle rode fiches;
- als al deze fiches blauw zijn, hebben we aan 1 zet genoeg.

Het maximaal aantal benodigde zetten is dus 2, met andere woorden: voor $k = 2$ geldt dat $n = 2$.

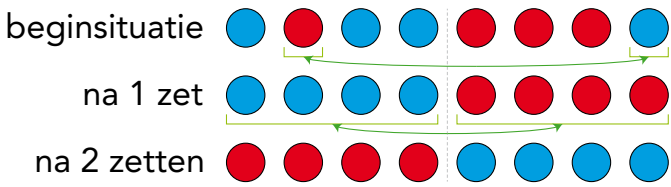
ALGEMEEN Voor $k = 1$ en $k = 2$ geldt dus: $n = k$. Zou het misschien zo zijn dat dit in het algemeen geldt, dus dat k het maximale aantal zetten is dat nodig is als we beginnen met $4k$ fiches? Om dat te bewijzen moeten we twee dingen laten zien:

- als we beginnen met een willekeurige rij van $4k$ fiches, kunnen we altijd in k zetten de gewenste eindsituatie bereiken;
- er bestaat een beginsituatie met $4k$ fiches waarin minder dan k zetten *niet* volstaan om de eindsituatie te bereiken.

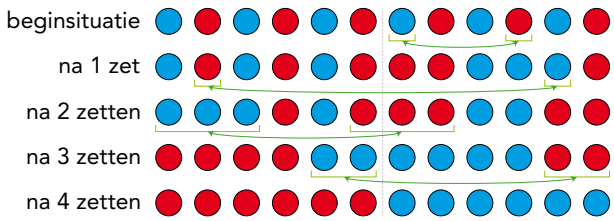
We beginnen met dat eerste; we gaan dus op zoek naar een strategie waarbij we altijd in k zetten klaar zijn. Bekijk eerst het geval dat er minstens k rode fiches in de eerste helft liggen. Dan liggen er dus hoogstens k blauwe fiches in de eerste helft en er liggen net zo veel rode fiches in de tweede helft. Nu kunnen we dus net als voor de gevallen $k = 1$ en $k = 2$ deze rode fiches één voor één omwisselen met de blauwe fiches uit de eerste helft. Omdat we maar hooguit k fiches hoeven om te wisselen, kunnen we in deze situatie dus met hooguit k zetten klaar zijn.

En wat nu als er minder dan k rode fiches in de eerste helft liggen? Als er geen rode fiches in de eerste helft liggen, zijn we natuurlijk in één zet klaar. Nu moeten we dus nog een strategie verzinnen voor als er tussen de 1 en de $k - 1$ rode fiches in de eerste helft liggen. Als we vergelijken met wat we voor $k = 2$ in dit geval deden, zien we dat we op dezelfde manier de rode fiches uit de eerste helft één voor één kunnen omwisselen met de blauwe fiches uit de tweede helft. Dit kost ons dus hooguit $k - 1$ zetten en met 1 extra zet kunnen we nu alle rode fiches omwisselen met alle blauwe, zodat we de gewenste situatie bereiken in hooguit $k - 1 + 1 = k$ zetten. Dit betekent dat we nu een strategie hebben gegeven waarmee we vanuit elke beginsituatie in hooguit k stappen de gewenste eindsituatie kunnen bereiken.

Om te laten zien dat $n = k$ ook de *kleinste* waarde van n is zodat we altijd de gewenste eindsituatie kunnen bereiken, moeten we nog een beginsituatie aangeven waarvoor we minstens k stappen nodig hebben om de eindsituatie te bereiken. Op basis van de strategie weten we al dat in zo'n beginsituatie in de linkerhelft de helft of één minder dan de helft van de fiches rood moet zijn; in alle andere gevallen zijn we met onze strategie namelijk al in



Figuur 2



	aantal wisselingen	aantal blauw-rood	aantal blauw oneven
beginsituatie	11	6	6
na 1 zet	7	4	5
na 2 zetten	5	3	4
na 3 zetten	2	1	3
na 4 zetten	1	0	3

Figuur 3

minder dan k zetten klaar. We gaan laten zien dat als we uitgaan van de beginsituatie waarin de fiches afwisselend blauw en rood zijn (waarbij het eerste fiche blauw is), we niet in minder dan k stappen de eindsituatie kunnen bereiken.

In figuur 3 is een mogelijke manier weergegeven om voor $k = 3$ vanuit deze situatie de eindsituatie te bereiken (de manier die daar gebruikt wordt is niet de beste, want we weten al dat we de eindsituatie in 3 stappen kunnen bereiken). Verder hebben we voor elk van de tussensituaties drie grootheden uitgerekend: het aantal kleurwisselingen W (oftewel het aantal paren opeenvolgende fiches van verschillende kleur), het aantal keer dat er een rood fiche direct rechts van een blauw fiche ligt, en het aantal blauwe fiches dat op een oneven positie ligt. Dit zijn grootheden die in de beginsituatie groter zijn dan in de eindsituatie en daarmee deze twee situaties van elkaar onderscheiden.

Het blijkt dat met behulp van elk van deze grootheden bewezen kan worden dat er voor deze situatie minstens k zetten nodig zijn om de eindsituatie te bereiken. We zullen aan de hand van de eerste grootheid (W) voordoen hoe je zoiets kan bewijzen. In de beginsituatie geldt $W = 4k - 1$. In de gewenste eindsituatie is W nog maar gelijk aan 1. In ons voorbeeld voor $k = 3$ zien we dat W achtereenvolgens met 4, 2, 3 en 1 afneemt. Laten we eens goed kijken wat er met W kan gebeuren als we een zet doen. Er zijn hooguit vier plekken waar iets kan veranderen: op de randen van de twee groepen fiches die we verwisselen. Dit betekent dat W bij elke zet maar met hooguit 4 kan afnemen (merk op dat W ook zou kunnen toenemen; dat maakt niet uit voor ons argument). Maar dan kan hij na $k - 1$ stappen dus met hooguit $4(k - 1)$ zijn afgenomen, wat betekent dat W dan nog minstens gelijk is aan $4k - 1 - 4(k - 1) = 3$, dus we kunnen onze eindsituatie nog niet bereikt hebben. Dit betekent dat we voor deze beginsituatie inderdaad altijd minstens k stappen nodig hebben om de eindsituatie te bereiken. Hiermee hebben we de opgave nu helemaal opgelost.

VARIATIES Er zijn een aantal variaties op deze oplossing mogelijk: we kunnen ook alleen de wisselingen waarbij een rood fiche direct rechts van een blauw fiche ligt meetellen. Het aantal van deze wisselingen kan per zet maar met maximaal 2 afnemen, maar is in de begin- en eindsituatie gelijk aan respectievelijk $2k$ en 0. Ook dit laat zien dat er minstens k stappen nodig zijn. En ook door te kijken naar het totaal aantal blauwe fiches dat zich op een oneven positie bevindt, kunnen we laten zien dat we in $k - 1$ stappen de eindsituatie nog niet kunnen hebben bereikt.

Voor het bewijs dat er soms minstens k stappen nodig zijn, hebben we dus een aantal verschillende mogelijkheden. Laten zien dat we altijd in k stappen de eindsituatie kunnen bereiken (ongeacht de beginsituatie) kan ook op meer dan één manier. We schetsen hier een tweede strategie, naast die aan het begin van het verhaal. We verdelen eerst de $4k$ fiches in $2k$ groepjes van 2 naast elkaar liggende fiches. Ga na dat nu een even aantal van deze groepjes zowel een rood als een blauw fiche bevat. Door telkens één fiche te verwisselen, maken we hier groepjes van die óf twee blauwe óf twee rode fiches bevatten, op zo'n manier dat de groepjes met twee blauwe fiches zoveel mogelijk aan de rechterkant liggen. Nadat we dit gedaan hebben, bevat elk groepje twee blauwe of twee rode fiches. We verwisselen vervolgens telkens twee groepjes, zodat de k meest rechtse groepjes allemaal blauw worden. Je kunt dit zelf uitproberen op je favoriete beginsituatie om te zien dat de eindsituatie inderdaad in niet meer dan k zetten wordt bereikt. Om daadwerkelijk te bewijzen dat deze strategie altijd werkt, is wat meer werk vereist. ■